

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROJETO DE GRADUAÇÃO**

THIAGO AGUIAR GOMES

**ANÁLISE ALGÉBRICA DO PROBLEMA DE FLUXO DE
POTÊNCIA**

VITÓRIA
2019

THIAGO AGUIAR GOMES

ANÁLISE ALGÉBRICA DO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA

Parte manuscrita do Projeto de Graduação do aluno **Thiago Aguiar Gomes**, apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Eletricista.

Orientador: Prof. D.Sc. Oureste Elias Batista

VITÓRIA
2019

THIAGO AGUIAR GOMES

ANÁLISE ALGÉBRICA DO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA

Parte manuscrita do Projeto de Graduação do aluno **Thiago Aguiar Gomes**, apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Eletricista.

Aprovada em 13 de dezembro de 2019.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. D.Sc. Oureste Elias Batista
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. D.Sc. Augusto César Rueda Medina
Universidade Federal do Espírito Santo
Examinador

Ma. Mariana Altoé Mendes
Universidade Federal do Espírito Santo
Examinador

RESUMO

A análise do fluxo de potência é fundamental no estudo dos sistemas de potência, tanto para a compreensão do atual estado da rede, como para planejamentos futuros. Este trabalho apresenta conceitos algébricos envolvidos no entendimento do fluxo de potência, com foco em um sistema de dois barramentos. Dada a natureza gráfica do problema, um sistema de dois barramentos foi escolhido, pois possibilita a visualização das superfícies em três dimensões, visto que não seria viável a demonstração em um sistema com mais barramentos, pois implicaria em superfícies com quatro dimensões ou mais. A partir da metodologia que foi desenvolvida, é proposto encontrar as equações que descrevem o fluxo de potência do sistema, as superfícies que descrevem essas equações, as soluções do problema e o limite de potência ativa que poderia ser fornecida pelo sistema. Essa análise foi realizada de maneira algébrica e gráfica através de simulações no MATLAB.

Palavras-chave: Fluxo de potência. Análise algébrica. Simulação.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Teorema dos eixos principais	15
Figura 2 – Formas canônicas	16
Figura 3 – Formas rotacionadas por termos mistos	16
Figura 4 – Interseção de superfícies em 2-D	25
Figura 5 – Forma rotacionada.....	26
Figura 6 – Forma canônica	26
Figura 7 – Superfície que descreve a matriz A	27
Figura 8 – Superfície que descreve a matriz B	28
Figura 9 – Superfície que descreve a matriz $C = A - B$	28
Figura 10 – Pontos de interseção de A e B	29
Figura 11 – Sistema de dois barramentos	30
Figura 12 – Superfície que descreve XP_2	32
Figura 13 – Projeção de XP_2 no plano $e_2 - f_2$	33
Figura 14 – Superfície que descreve $XQ_2: e_1 = Fe_2, f_2$	33
Figura 15 – Superfície que descreve $XQ_2: f_2 = Fe_1, e_2$	34
Figura 16 – Projeção da Figura 15 no plano $e_2 - f_2$	34
Figura 17 – Planos que descrevem $V12$	35
Figura 18 – Projeções de Q_2 e P_2 no plano $e_2 - p_2$	36
Figura 19 – Soluções encontradas com o MATPOWER.....	36
Figura 20 – Limite de potência ativa	37

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Classificação dos barramentos.....	18
Quadro 2 – Matriz J_{P2} seus autovalores e autovetores	31
Quadro 3 – Matriz J_{Q2} seus autovalores e autovetores	32

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Soluções	35
---------------------------	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IEEE *Institue of Electrical and Electronics Engineers*

LISTA DE SÍMBOLOS

λ	Autovalor
θ	Ângulo
I	Corrente (A)
V	Tensão (V)
Y	Admitância (S)
S	Potência aparente (VA)
P	Potência ativa (W)
Q	Potência reativa (Var)
i	Representa o número do barramento
z_i	Representa uma grandeza (P , Q ou V^2) na barra i
J_i	Matriz admitância definida pelo tipo de injeção
J_{si}	Matriz admitância reduzida (2N-1)
x_r	Vetor tensão nos nós
e	Componente real de x_r
f	Componente imaginária de x_r
G	Componente real de Y
B	Componente imaginária de Y
N	Número de barramentos
γ	Vetor $N \times 1$ de constantes arbitrárias
α	Vetor γ constituído de 0 em todas posições exceto em uma
M	Matriz auxiliar para redução da dimensão de J_i
s	Barra de referência
δ_s	Ângulo da tensão no barramento de referência
c	Pontos de interseção das hipersuperfícies e os eixos principais

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	JUSTIFICATIVA	11
3	OBJETIVOS	12
	3.1 Objetivo Geral	12
	3.2 Objetivos Específicos.....	12
4	EMBASAMENTO TEÓRICO	13
	4.1 Formas Quadráticas.....	13
	4.2 Diagonalização de Matrizes	14
	4.3 Mudança de Variáveis.....	14
	4.4 Teorema dos Eixos Principais	15
	4.5 Fluxo de Potência.....	16
	4.5.1 Equações Básicas do Fluxo de Potência.....	16
	4.5.2 Classificação dos Barramentos.....	18
	4.5.3 2N Equações.....	19
	4.5.4 2N-1 Equações	21
	4.5.5 Autovalores e Autovetores de JPi	21
	4.5.6 Autovalores e Autovetores de JQi	22
	4.5.7 Autovalores e Autovetores de JV_i^2	22
	4.5.8 Autovalores e Autovetores para JPi reduzido para $(2N-1) \times (2N-1)$	23
	4.6 Soluções do Fluxo de Potência e Interseção de Superfícies Quadráticas.....	24
	4.7 Simulação do Teorema dos Eixos Principais	25
	4.8 Simulação da Interseção de Superfícies	27
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	30
	5.1 Sistema de Dois Barramentos.....	30
	5.2 Soluções	35
6	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS.....	38
	6.1 Conclusão	38
	6.2 Trabalhos Futuros	38
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	39

1 INTRODUÇÃO

A análise do fluxo de potência é uma das mais importantes e essenciais abordagens para compreender problemas na operação e planejamento de sistemas de potência. Baseado em um estado de geração especificado, e na estrutura do sistema de distribuição, a análise do fluxo de potência soluciona o regime permanente de operação de um sistema de potência. A análise do fluxo de potência pode fornecer um regime estável de operação do sistema de potência, sem considerar os processos de transição, o que faz com que o modelo matemático do fluxo de potência seja dado por equações algébricas não lineares, sem equações diferenciais. Matematicamente, a solução do fluxo de potência normalmente é dada por um processo iterativo (WANG; SONG; IRVING, 2019, p. 71).

As principais informações obtidas da análise do fluxo de potência são a magnitude e fase da tensão em barramentos de carga, potência reativa e ângulo da tensão em barramentos de geração e potência ativa e reativa nos barramentos de referência. Essas informações são fundamentais para o monitoramento contínuo do atual estado do sistema e para realizar planos para a expansão do sistema (KOTHARI; NAGRATH, 2009, p. 185).

Nos estágios iniciais do uso de computadores como ferramenta para solucionar problemas de fluxo de potência, por volta dos anos 1950, o método mais utilizado era o método iterativo de Gauss-Seidel. Esse processo atendia a capacidade computacional e os sistemas de potência na época. No entanto, quando o sistema crescia em tamanho o número de iterações aumentava abruptamente e, as vezes, impossibilitava a convergência. Como uma abordagem alternativa, um outro método a se aplicar é o método de Newton-Raphson. Para sistemas maiores, o método de Newton é superior ao Gauss-Seidel em aspectos de convergência, uso de memória e velocidade de processamento. A partir dos anos 1960, o método de Newton-Raphson passou a se popularizar e é utilizado até hoje (WANG; SONG; IRVING, 2019, p. 72).

2 JUSTIFICATIVA

O estudo do problema de fluxo de potência tem sido alvo de estudos por mais de cinco décadas, e numerosas contribuições têm sido feitas nessa área dos sistemas de potência. O campo de pesquisa do fluxo de potência pode ser dividido, de maneira geral, em duas áreas: o desenvolvimento de ferramentas numéricas para resolver as equações do fluxo de potência e a compreensão analítica de algumas propriedades dessas equações. O trabalho, nesses dois aspectos, se complementa. Algoritmos mais eficientes foram desenvolvidos a partir dos resultados da análise das propriedades das equações do fluxo de potência, como também observações no comportamento dos processos numéricos envolvendo essas equações motivaram estudos teóricos (TOUSSAINT, 1994, p. 7).

Portanto, a compreensão da teoria envolvida na análise do fluxo de potência é essencial para abranger as mudanças que ocorrem nos sistemas de potência modernos.

Esse projeto de graduação foi motivado a retomar estudos de 1994 sobre o fluxo de potência feitos por Margaret Toussaint, do Departamento de Engenharia Elétrica da McGill University em Montreal, no Canadá.

3 OBJETIVOS

3.1 Objetivo Geral

O objetivo desse trabalho foi desenvolver um programa em MATLAB capaz de auxiliar na análise do problema do fluxo de potência em um sistema de dois barramentos.

3.2 Objetivos Específicos

Com esse projeto foi possível:

- Simular e analisar o teorema dos eixos principais;
- Simular e analisar um processo de interseção de superfícies, dadas equações descritas por duas matrizes;
- Simular e analisar as superfícies descritas pelas equações do fluxo de potência em um sistema de dois barramentos;
- Encontrar as soluções para o sistema de dois barramentos descrito, a partir da interseção das superfícies.
- Comparar os resultados com soluções obtidas por diferentes métodos de solução do problema.

4 EMBASAMENTO TEÓRICO

O presente capítulo busca apresentar os conceitos envolvidos no problema de fluxo de potência e as ferramentas matemáticas utilizadas para realizar a análise algébrica de equações dessa natureza.

As equações do fluxo de potência descrevem condições que devem ser satisfeitas para que haja um balanço entre a potência gerada e a potência consumida em uma rede de energia elétrica. Essas equações podem ser representadas tanto na forma polar, como na forma retangular, e apesar da forma polar ser boa para cálculos numéricos, a versão retangular é mais apropriada para estudos analíticos. Ao formular as equações em coordenadas retangulares, é possível descrever as equações do fluxo de potência em forma quadrática, possibilitando uma análise das propriedades desse tipo de equações (TOUSSAINT, 1994, p. 17).

4.1 Formas Quadráticas

São ditas formas quadráticas de R^n equações da forma descrita em (4.1).

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2 + (\text{todos os termos } a_kx_ix_j \text{ possíveis nos quais } x_i \neq x_j) \quad (4.1)$$

Os termos da forma $a_kx_ix_j$ são denominados termos com produto misto. É costume combinar os termos com produto misto x_ix_j com os termos x_jx_i . Assim uma forma quadrática de R^3 , por exemplo, pode ser escrita conforme a equação (4.2).

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_3 + 2a_6x_2x_3 \quad (4.2)$$

Essas equações podem ser tratadas no formato matricial como em (4.3).

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^T Ax \quad (4.3)$$

Pode-se observar que a matriz A nessa equação é simétrica, suas entradas na diagonal são os coeficientes dos termos ao quadrado, e suas entradas fora da diagonal são a metade dos

coeficientes dos termos com produto misto (ANTON; RORRES, 2012, p. 405). Essa função pode ser calculada pela equação (4.4).

$$Q(x) = x^T Ax \quad (4.4)$$

4.2 Diagonalização de Matrizes

Uma matriz A é dita ortogonalmente diagonalizável se escrita como em (4.5).

$$P^T AP = D \quad (4.5)$$

Sendo P ortogonal ($P^T = P^{-1}$), A só será ortogonalmente diagonalizável se for simétrica como visto em (4.6).

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PD^T P^T = PDP^T = A \quad (4.6)$$

Portanto, a partir de uma matriz A , é possível calcular a matriz diagonal D onde seus elementos são os autovalores de A . A matriz P é a matriz de autovetores de A , onde cada coluna de P é um autovetor do autovalor associado à mesma coluna em D (ANTON; RORRES, 2012, p. 397).

Sendo que os autovalores e autovetores são definidos da seguinte forma:

Se A for uma matriz $n \times n$, então um vetor não nulo \mathbf{x} em R^n é denominado *autovetor* de A (ou operador matricial T_A) se $A\mathbf{x}$ for um múltiplo escalar de \mathbf{x} , isto é,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

com algum escalar λ . O escalar λ é denominado *autovalor* de A (ou de T_A , e dizemos que \mathbf{x} é um *autovetor associado a λ* (ANTON; RORRES, 2012, p. 397).

4.3 Mudança de Variáveis

Uma simplificação da forma quadrática $x^T Ax$ pode ser obtida com a troca de $x = Py$ e substituindo em (4.3) o que gera a equação (4.7).

$$Q(x) = x^T Ax = (Py)^T A(Py) = y^T P^T APy = y^T (P^T AP)y = Q(y) \quad (4.7)$$

Mas de (4.5) sabe-se que $D = P^T AP$ e tem-se (4.8).

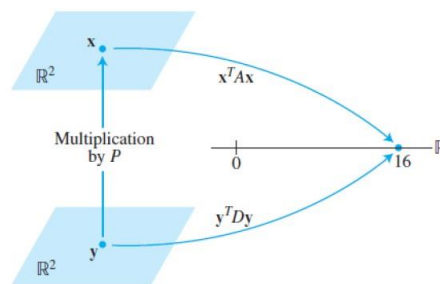
$$Q(y) = y^T Dy \quad (4.8)$$

Agora a nova forma quadrática $y^T D y$ é descrita pela forma matricial (4.9), onde D é a matriz diagonal com os autovalores de A na diagonal principal.

$$\begin{aligned} x^T A x &= y^T D y \\ &= [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Com isso é possível representar a mesma equação $Q(x)$, descrita pela matriz A , como uma equação $Q(y)$, descrita pela matriz D , ou seja, $Q(x) = Q(y)$. Representar $Q(x)$ em função de y , significa encontrar um novo eixo de coordenadas. Este resultado é denominado teorema dos eixos principais e pode ser visualizado na Figura 1.

Figura 1 – Teorema dos eixos principais



Fonte: Lay (1999).

4.4 Teorema dos Eixos Principais

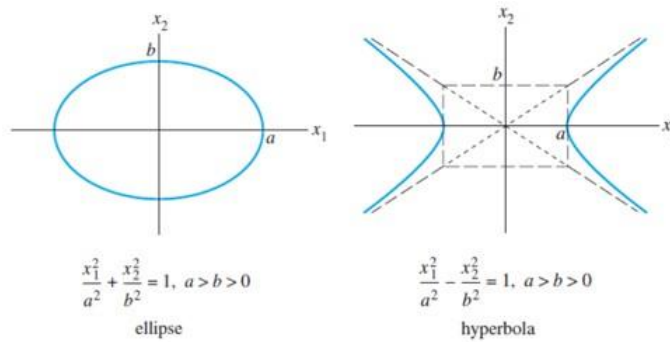
Se A for uma matriz simétrica $n \times n$, então existe uma mudança de variáveis ortogonal que transforma a forma quadrática $x^T A x$ na forma quadrática $y^T D y$ sem termos mistos. Especificamente, se P diagonaliza A ortogonalmente, então a mudança de variáveis $x = P y$ transforma a forma quadrática $x^T A x$ na forma quadrática:

$$x^T A x = y^T D y = \lambda_1 y_{12} + \lambda_2 y_{22} + \dots + \lambda_n y_{n2} \quad (4.10)$$

na qual $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ são os autovalores de A associados aos autovetores que constituem as colunas sucessivas de P (ANTON; RORRES, 2012, p. 407).

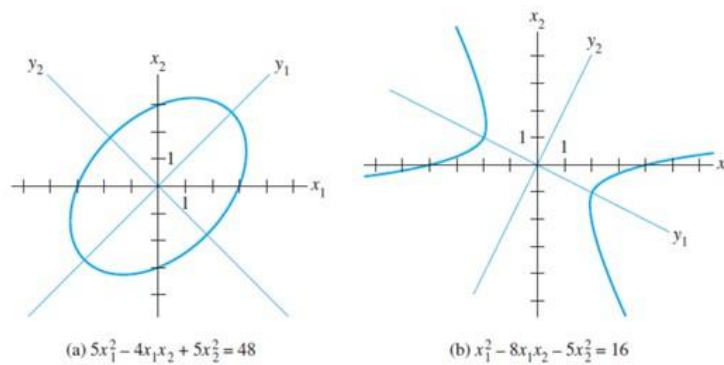
Geometricamente a presença de termos mistos indica que o gráfico, de sua forma quadrática, foi girado em torno de sua forma canônica, como visto na Figura 2. Então, ao determinar os autovetores de uma matriz, significa encontrar um novo sistema de coordenadas em relação ao qual o gráfico se encontra em posição canônica, ou seja, não está rotacionada, como ilustrado na Figura 3 (LAY, 1999, p. 417).

Figura 2 – Formas canônicas



Fonte: Lay (1999).

Figura 3 – Formas rotacionadas por termos mistos



Fonte: Lay (1999).

4.5 Fluxo de Potência

4.5.1 Equações Básicas do Fluxo de Potência

A equação matricial (4.11) representa um sistema de N-barramentos e pode ser descrita pela equação (4.12).

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} & \dots & \bar{Y}_{1n} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} & \dots & \bar{Y}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{Y}_{n1} & \bar{Y}_{n2} & \dots & \bar{Y}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \vdots \\ \bar{V}_n \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\bar{I}_i = \sum_{j=1}^n \bar{Y}_{ij} \bar{V}_j \quad (4.12)$$

A equação (4.13) representa a potência aparente injetada em um barramento.

$$S_i = P_i + jQ_i = V_i I_i^* \quad (4.13)$$

Mas, pode-se definir \bar{V}_i , \bar{V}_j e \bar{Y}_{ij} em coordenadas polares conforme equações (4.14), (4.15) e (4.16).

$$\bar{V}_i = V_i e^{j\theta_i} \quad (4.14)$$

$$\bar{V}_j = V_j e^{j\theta_j} \quad (4.15)$$

$$\bar{Y}_{ij} = Y_{ij} e^{j\varphi_{ij}} \quad (4.16)$$

Portanto, é possível reescrever a equação (4.13), como em (4.17).

$$\bar{S}_i = P_i + jQ_i = V_i e^{j\theta_i} [\sum_{j=1}^n Y_{ij} V_j e^{j(\theta_j + \varphi_{ij})}]^* \quad (4.17)$$

E, com isso, pode-se escrever as equações (4.18) e (4.19).

$$P_i = \sum_{j=1}^n V_i V_j Y_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j - \varphi_{ij}) \quad (4.18)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n V_i V_j Y_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j - \varphi_{ij}) \quad (4.19)$$

As equações (4.18) e (4.19) são conhecidas como equações básicas do fluxo de potência, representando a injeção líquida de potência ativa e reativa em cada barra, respectivamente. Pode-se ver que, para qualquer barramento, há duas equações. Então, para sistemas de potência de N barramentos existem um total de 2N equações.

De (4.18) e (4.19) vê-se que o sistema é composto por quatro variáveis (V_i , θ_i , P_i e Q_i) associadas ao n -ésimo barramento. Seja um sistema de N barramentos há um total de 4N variáveis. Das 4N variáveis, apenas 2N equações estão disponíveis. Portanto, 2N valores devem ser especificados e 2N valores são solução das 2N equações de fluxo de potência. Como em um sistema de N barramentos, 2N variáveis devem ser encontradas e os outros dois valores devem ser dados. Com isso existem algumas classificações quanto aos valores determinados (WANG, 2008, p. 74).

4.5.2 Classificação dos Barramentos

Segundo Wang (2008, p. 75) dependendo de como vão ser trabalhados os valores do problema de fluxo de potência são divididos em categorias, a saber:

Barramento PQ: Esses são os barramentos aos quais as cargas são conectadas, por isso são comumente chamados de barramentos de carga. Tipicamente, os valores de potência ativa e reativa das cargas conectadas a esse barramento são conhecidas e, conseqüentemente, os valores calculados são de V_i e θ_i .

Barramento PV: Fisicamente, esses barramentos representam os geradores. Geralmente a potência ativa fornecida pelo gerador é conhecida, e também a magnitude da tensão nos terminais do gerador é mantida constante em um valor pré-estabelecido. Assim, em um barramento PV os valores P_i e V_i são especificadas e Q_i e θ_i devem ser calculados.

Barramento V θ : Para calcular os ângulos θ_i , um ângulo de referência deve ser escolhido para que os ângulos das tensões dos outros barramentos possam ser calculados a partir do referido ângulo. Além disso, a soma das potências geradas deve ser igual à soma de todas as cargas do sistema mais as perdas. Porém, as perdas do sistema não podem ser calculadas antes do problema de fluxo de potência ser resolvido e não há como a potência ativa injetada por todos geradores no sistema ser pré-determinada. Deve haver pelo menos um gerador no sistema que irá suprir as perdas, além da sua contribuição para as cargas. Então, para esse gerador, a potência ativa não pode ser avaliada. Porém, V_i ainda pode ser especificado. Por isso, para esse gerador V_i e $\theta_i=0$ são especificados e P_i e Q_i são calculados. O barramento com esse gerador é conhecido como barramento de referência e normalmente está associado ao maior gerador do sistema.

Em resumo, os diferentes tipos de barramentos em um sistema de potência com N barramentos e m geradores são dados pelo Quadro 1.

Quadro 1 – Classificação dos barramentos

Tipo	Número de barramentos	Valor dado	Valor a se encontrar
PQ	N-m	P_i, Q_i	V_i, θ_i
PV	m-1	P_i, V_i	Q_i, θ_i
V θ (Referência)	1	V_i, θ_i	P_i, Q_i

Fonte: Produção do próprio autor.

4.5.3 2N Equações

Em um sistema de N-barramentos, z_i denota uma determinada grandeza (P , Q ou V^2). Essas equações podem ser expressas na forma quadrática, tal qual (4.20).

$$z_i = x_r^T J_i x_r \quad (4.20)$$

Onde x_r é o vetor $2N \times 1$, visto em (4.21), dos componentes reais e imaginários das tensões nos nós.

$$x_r = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

E J_i é a matriz $2N \times 2N$ determinada pelo tipo de injeção de barra e matriz admitância.

A corrente injetada nos barramentos de uma rede, como visto em (4.12), pode ser reescrita como em (4.22).

$$I = Y V \quad (4.22)$$

Onde I é o vetor $N \times 1$ de injeção de corrente, Y é a matriz admitância $N \times N$ e V é o vetor $N \times 1$ de tensões nos barramentos. Porém, em sistemas de potência, as potências são conhecidas e não as correntes. Podemos então entender a equação (4.13) como em (4.23).

$$S = \text{diag}(V) I^* = \text{diag}(V) (Y V)^* = P + jQ \quad (4.23)$$

Onde S é um vetor $N \times 1$ de potências aparentes, $\text{diag}(V)$ é a matriz diagonal das tensões e P e Q são os vetores $N \times 1$ de injeção de potência ativa e reativa, respectivamente. Se V for substituído por $e + jf$ e Y por $G + jB$ na equação (4.23) e o resultado simplificado é visto em (4.24) e (4.25).

$$P = \text{diag}(e)[Ge - Bf] + \text{diag}(f)[Gf + Be] \quad (4.24)$$

$$Q = \text{diag}(e)[-Gf - Be] + \text{diag}(f)[Ge - Bf] \quad (4.25)$$

Onde $\text{diag}(e)$ e $\text{diag}(f)$ são matrizes diagonais cujos elementos da diagonal são iguais a e e f , respectivamente.

Para qualquer vetor $N \times 1$ arbitrário, de constantes γ , e um vetor $N \times 1$ z , de injeções especificadas, a afirmação em (4.26) é verdadeira.

$$\gamma^T z = \sum_{i=1}^N \gamma_i z_i \quad (4.26)$$

Se z é um vetor de injeção de potência ativa, uma combinação linear dessas injeções é dada por (4.27).

$$\gamma^T P = x_r^T \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{diag}(\gamma)G + G\text{diag}(\gamma) & B\text{diag}(\gamma) - \text{diag}(\gamma)B \\ -B\text{diag}(\gamma) + \text{diag}(\gamma)B & \text{diag}(\gamma)G + G\text{diag}(\gamma) \end{bmatrix} x_r \quad (4.27)$$

Similarmente, o caso se z for potência reativa é dado por (4.28).

$$\gamma^T Q = x_r^T \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\text{diag}(\gamma)B - B\text{diag}(\gamma) & G\text{diag}(\gamma) - \text{diag}(\gamma)G \\ -G\text{diag}(\gamma) + \text{diag}(\gamma)G & -\text{diag}(\gamma)B - B\text{diag}(\gamma) \end{bmatrix} x_r \quad (4.28)$$

Onde $\text{diag}(\gamma)$ é a matriz diagonal $N \times N$ cujos elementos da diagonal consistem nos valores do vetor γ .

Se γ consistir de zeros exceto em uma posição i , $\gamma^T P$ e $\gamma^T Q$ são iguais a P_i e Q_i , respectivamente, e as equações (4.27) e (4.28) representam as injeções líquidas de potências ativas e reativas no barramento i . Esse γ em particular é definido agora como α e as equações (4.27) e (4.28) são simplificadas em (4.29) e (4.30).

$$\alpha^T P = x_r^T \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha g^T + g \alpha^T & -\alpha b^T + b \alpha^T \\ \alpha b^T - b \alpha^T & \alpha g^T + g \alpha^T \end{bmatrix} x_r \quad (4.29)$$

$$\alpha^T Q = x_r^T \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\alpha b^T - b \alpha^T & -\alpha g^T + g \alpha^T \\ \alpha g^T - g \alpha^T & -\alpha b^T - b \alpha^T \end{bmatrix} x_r \quad (4.30)$$

Onde g e b são a i -ésima coluna de G e B respectivamente. A magnitude da tensão no barramento i ao quadrado também pode ser escrito de maneira similar, como em (4.31).

$$\alpha^T V^2 = x_r^T \begin{bmatrix} \text{diag}(\alpha) & 0 \\ 0 & \text{diag}(\alpha) \end{bmatrix} x_r \quad (4.31)$$

Em cada barramentos PQ e PV do sistema existem duas equações quadráticas descrevendo tais injeções. No barramento de referência existe uma equação quadrática descrevendo a magnitude de tensão ao quadrado e mais uma equação com condições arbitrárias. As injeções então formam $(2N-1)$ equações não-lineares (TOUSSAINT, 1994, p. 18).

4.5.4 2N-1 Equações

É possível reduzir o número de equações desconhecidas por um. Pode-se eliminar o termo da parte imaginária da barra de referência f_s , por ser considerado zero. A matriz reduzida pode ser obtida com auxílio da matriz (4.32).

$$M = I - mm^T + m\alpha_s^T \quad (4.32)$$

Onde I é a matriz identidade $2N \times 2N$ e m é o vetor $2N \times 1$ de zeros exceto por um 1 na $(N+s)$ -ésima posição e $d = Mx_r$. A equação (4.20) pode ser reescrita como em (4.33).

$$\begin{aligned} z_i &= d^T (M^{-1})^T J_i M^{-1} d \\ &= d^T J_{si} d \end{aligned} \quad (4.33)$$

Da equação (4.33) tem-se a equação (4.34). O $(N+s)$ -ésimo elemento de d é $(e_s \tan \delta_s - f_s)$, relativo à barra de referência e seu valor é igual a zero, portanto ele pode ser deletado. A matriz $J_i (2N-1) \times (2N-1)$ pode ser obtida eliminando a $(N+s)$ -ésima linha e coluna da matriz J_{si} .

$$J_{si} = (M^{-1})^T J_i M^{-1} \quad (4.34)$$

4.5.5 Autovalores e Autovetores de J_{Pi}

As matrizes definindo as equações quadráticas da potência ativa têm dois pares idênticos de autovalores, dados por (4.35) e (4.36) (TOUSSAINT, 1994, p. 24).

$$\lambda_{p1} = \frac{g^T \alpha + \sqrt{-(\alpha^T b)^2 + g^T g + b^T b}}{2} \quad (4.35)$$

$$\lambda_{p2} = \frac{g^T \alpha - \sqrt{-(\alpha^T b)^2 + g^T g + b^T b}}{2} \quad (4.36)$$

Cujos autovetores são, respectivamente, (4.37) e (4.38).

$$v = \begin{bmatrix} g + (2\lambda - \alpha^T g)\alpha \\ -b + (\alpha^T b)\alpha \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$v = \begin{bmatrix} b - (\alpha^T b)\alpha \\ g + (2\lambda - \alpha^T g)\alpha \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Onde λ é o respectivo autovalor do autovetor v .

4.5.6 Autovalores e Autovetores de J_{Qi}

As matrizes definindo as equações quadráticas da potência reativa também têm dois pares idênticos de autovalores, dados por (4.39) e (4.40) (TOUSSAINT, 1994, p. 26).

$$\lambda_{q1} = \frac{-b^T \alpha + \sqrt{-(\alpha^T g)^2 + g^T g + b^T b}}{2} \quad (4.39)$$

$$\lambda_{q2} = \frac{-b^T \alpha - \sqrt{-(\alpha^T b)^2 + g^T g + b^T b}}{2} \quad (4.40)$$

Cujos autovetores são respectivamente (4.41) e (4.42).

$$v = \begin{bmatrix} -b + (2\lambda + \alpha^T b)\alpha \\ -g + (\alpha^T g)\alpha \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$v = \begin{bmatrix} g - (\alpha^T g)\alpha \\ -b + (2\lambda + \alpha^T b)\alpha \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

4.5.7 Autovalores e Autovetores de J_{Vi}^2

A matriz do quadrado da magnitude da tensão no barramento i tem dois autovalores não nulos cada. Um dos autovetores correspondentes a esses autovalores é representado em (4.43), onde 1 está na i -ésima posição. O autovetor correspondente ao outro autovalor é visto em (4.44), onde 1 é a $(N+i)$ -ésima posição (TOUSSAINT, 1994, p. 28).

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

4.5.8 Autovalores e Autovetores para J_{p_i} reduzido para $(2N-1) \times (2N-1)$

Para injeções reais de potências, os autovalores são λ_{p1} , λ_{p2} , λ_{pa1} e λ_{pa2} , sendo λ_{p1} e λ_{p2} os mesmos descritos pelas equações (4.35) e (4.36). Os outros pares são definidos por (4.45) e (4.46) (TOUSSAINT, 1994, p. 29).

$$\lambda_{pa1} = \frac{g^T \alpha + \sqrt{-(\alpha^T b)^2 + g^T g + b^T b - (\beta^T b)^2 - (\beta^T g)^2}}{2} \quad (4.45)$$

$$\lambda_{pa2} = \frac{g^T \alpha - \sqrt{-(\alpha^T b)^2 + g^T g + b^T b - (\beta^T g)^2 - (\beta^T b)^2}}{2} \quad (4.46)$$

Onde β é um vetor $N \times 1$ de zeros, exceto por um 1 na posição s , onde o barramento s é o de referência.

O autovetor correspondente a λ_{pa1} e λ_{pa2} é dado pela equação (4.47).

$$v = \begin{bmatrix} g + (2\lambda - \alpha^T g + \alpha^T b \left(\frac{\beta^T g}{\beta^T b}\right))\alpha - \left(\frac{\beta^T g}{\beta^T b}\right)b \\ -b + (\alpha^T b + \alpha^T g \left(\frac{\beta^T g}{\beta^T b}\right) - 2\lambda \left(\frac{\beta^T g}{\beta^T b}\right))\alpha - \left(\frac{\beta^T g}{\beta^T b}\right)g \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

O autovetor correspondente a λ_{p1} e λ_{p2} é dado pela equação (4.48).

$$v = \begin{bmatrix} b - (\alpha^T b + \alpha^T g (\frac{\beta^T g}{\beta^T b}) - 2\lambda (\frac{\beta^T g}{\beta^T b}))\alpha + (\frac{\beta^T g}{\beta^T b})g \\ g + (2\lambda - \alpha^T g + \alpha^T b (\frac{\beta^T g}{\beta^T b}))\alpha - (\frac{\beta^T g}{\beta^T b})b \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Os autovalores e autovetores de J_{Q_i} são obtidos substituindo g por $-b$ e b por g nas equações (4.45), (4.46), (4.47) e (4.48).

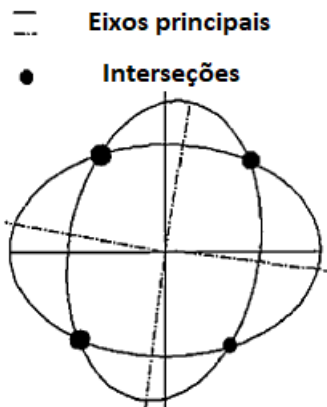
4.6 Soluções do Fluxo de Potência e Intersecção de Superfícies Quadráticas

Segundo Toussaint (1994, p. 35), as equações de fluxo de potência podem ser solucionadas encontrando a intersecção de $2N$ hipersuperfícies quadráticas e um hiperplano em um espaço de $2N$ -dimensões ou achando a intersecção de $(2N-1)$ superfícies quadráticas em um espaço de dimensão $(2N-1)$. O conhecimento da natureza de intersecção de superfícies quadráticas pode ser útil para provir informações nas características do fluxo de potência.

Soluções de equações quadráticas podem ser expressas como a soma e a diferença de dois pontos. Se uma matriz é definida como a soma das matrizes J_i em cada equação de fluxo de potência, então os autovetores dessa matriz satisfazem pelo menos uma dessas condições. Todas as somas e diferenças desses autovetores são usados como valores iniciais no algoritmo de Newton-Raphson para encontrar todas as soluções do fluxo de potência.

A ideia é utilizar os eixos e planos principais das hipersuperfícies quadráticas para desenvolver um algoritmo para encontrar as soluções do fluxo de potência. A hipótese é que, já que as soluções são dadas pelas intersecções dessas hipersuperfícies, então qualquer solução tem que estar na região entre os eixos e planos principais das superfícies quadráticas. A Figura 4 ilustra essa ideia em duas dimensões.

Figura 4 – Interseção de superfícies em 2-D



Fonte: Toussaint (1994).
Nota: Adaptada pelo autor.

Os pontos extremos das hipersuperfícies podem ser determinados encontrando onde elas interceptam seus eixos principais. Isso é feito expressando J_i na sua forma canônica e reescrevendo a equação (4.20) como em (4.49).

$$z_i = \sum_{k=1}^4 \lambda_k (v_k^T x)^2 \quad (4.49)$$

Onde z_i é qualquer injeção de potência e λ_k e v_k são o autovalor e autovetor normalizado da matriz J_i , respectivamente. Os pontos de interseção das hipersuperfícies e os eixos principais são dados pela equação (4.50).

$$c = \pm \sqrt{\frac{z_i}{\lambda}} \quad (4.50)$$

4.7 Simulação do Teorema dos Eixos Principais

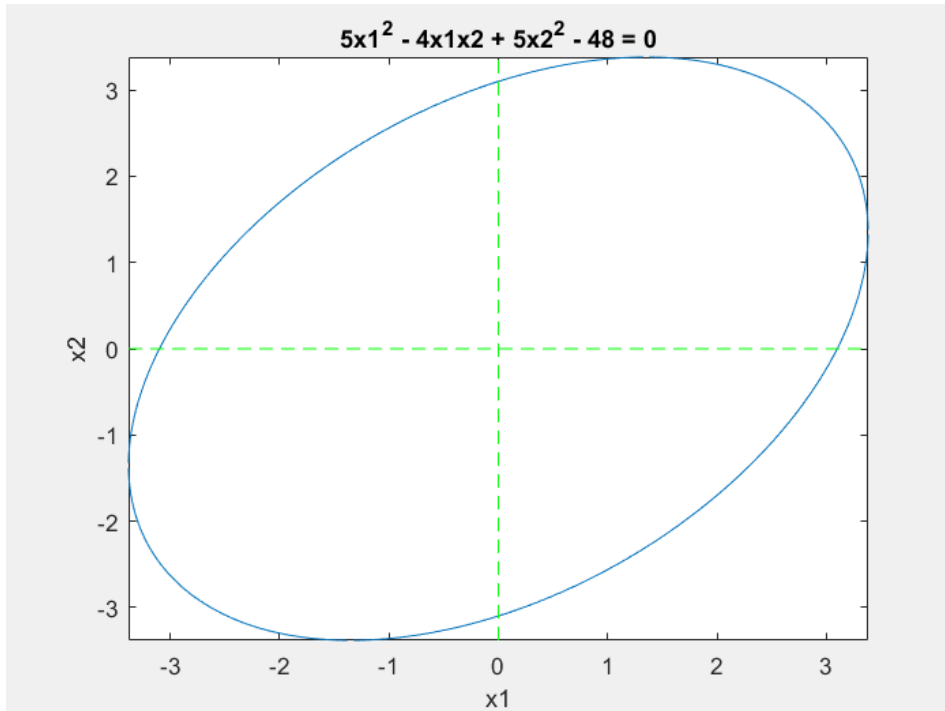
A primeira simulação que foi realizada é de uma equação dada por $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 48 = 0$. A matriz A que representa essa equação é dada em (4.51).

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

A representação de A pode ser vista na Figura 5. A matriz (4.51) pode ser diagonalizada, eliminando os termos mistos e fazendo com que ela deixe de ser rotacionada em relação aos

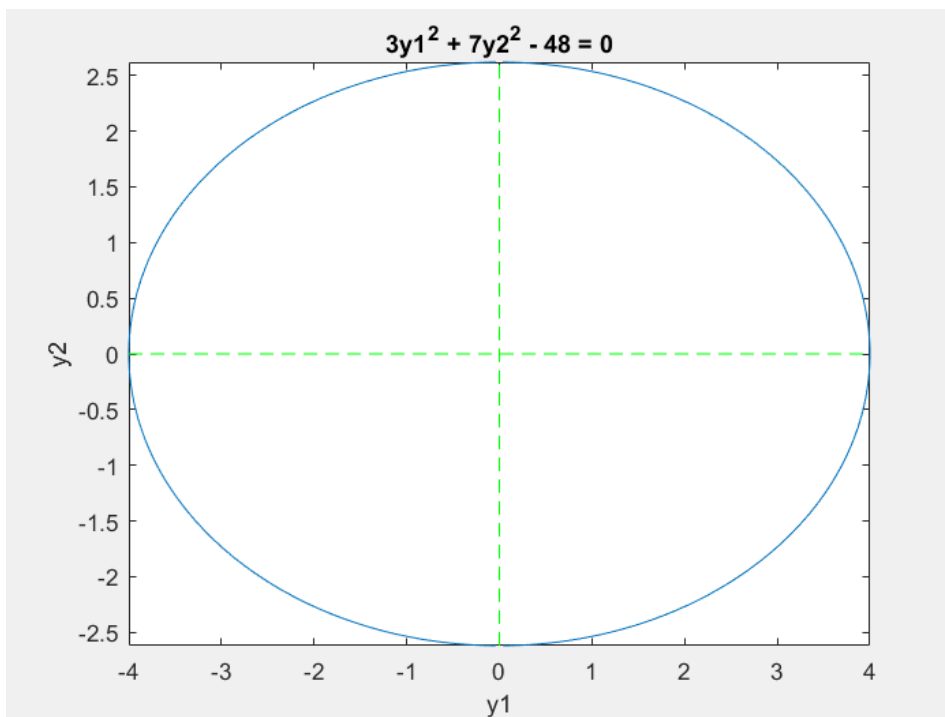
eixos principais. A nova matriz $Q(y) = y^T D y$ é representada na Figura 6, e D é a matriz cujos termos da diagonal principal são os autovalores de A .

Figura 5 – Forma rotacionada



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 6 – Forma canônica



Fonte: Produção do próprio autor.

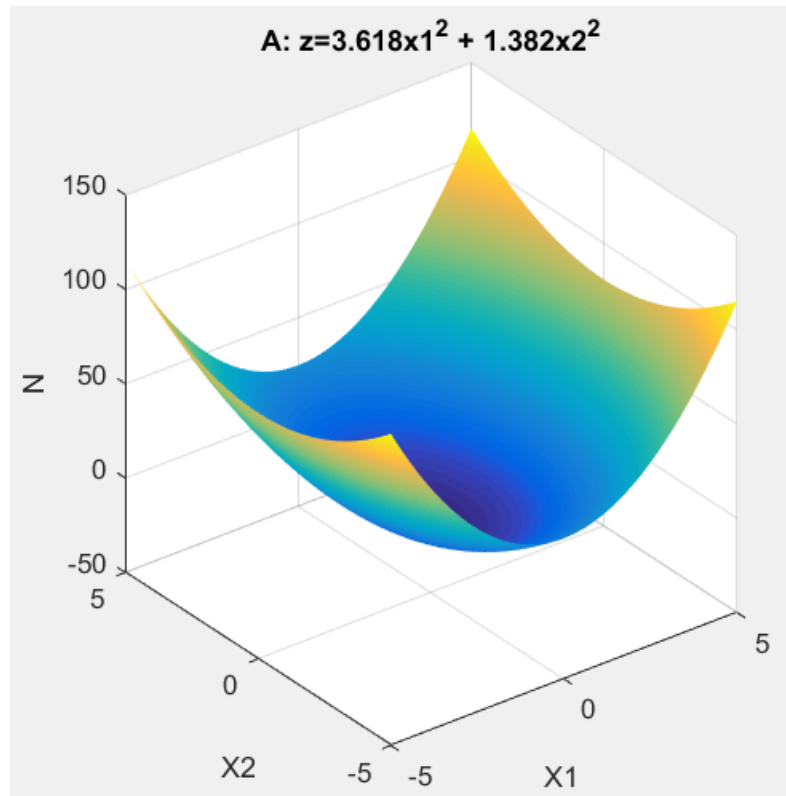
Este exemplo é importante para comprovar o teorema dos eixos principais e para a construção das demais simulações.

4.8 Simulação da Interseção de Superfícies

A segunda simulação trata a interseção de superfícies de maneira gráfica. O procedimento é simples: dadas matrizes A e B , calcula-se a suas formas quadráticas, elimina-se seus termos mistos através da diagonalização, encontra-se uma matriz C subtraindo-se B de A , e onde C for igual a zero são os pontos de interseção de A e B .

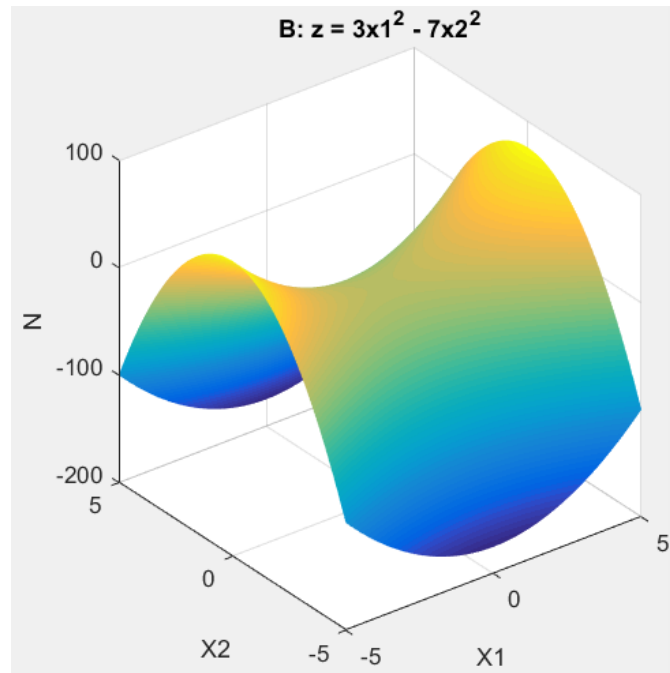
As equações que descrevem A e B são $A: z = 3.618x_1^2 + 1.382x_2^2$ e $B: z = 3x_1^2 - 7x_2^2$, respectivamente. A superfície que representa A é um parabolóide elíptico e a superfície que representa B é um parabolóide hiperbólico e podem ser vistas nas Figuras 7 e 8.

Figura 7 – Superfície que descreve a matriz A



Fonte: Produção do próprio autor.

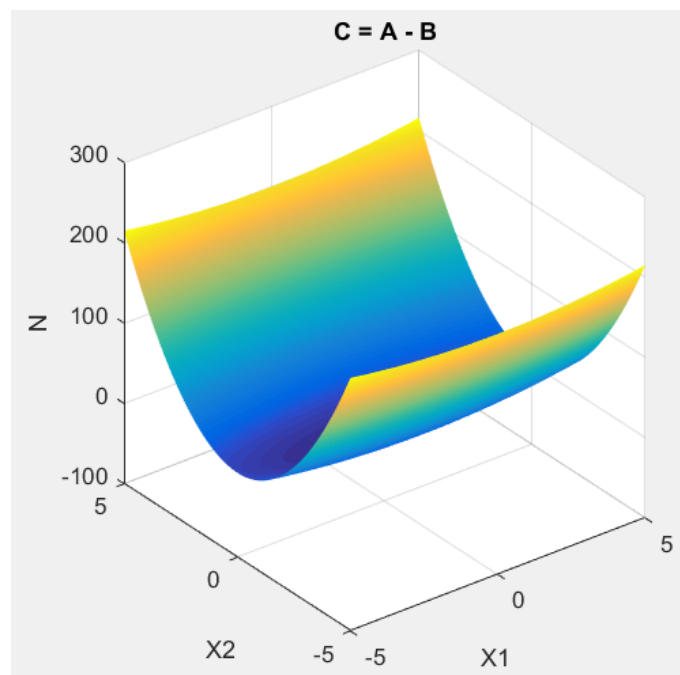
Figura 8 – Superfície que descreve a matriz B



Fonte: Produção do próprio autor.

Subtraindo-se a matriz B da matriz A , obtém-se uma matriz resultante C . A superfície que é descrita pela matriz C pode ser vista na Figura 9.

Figura 9 – Superfície que descreve a matriz $C = A - B$

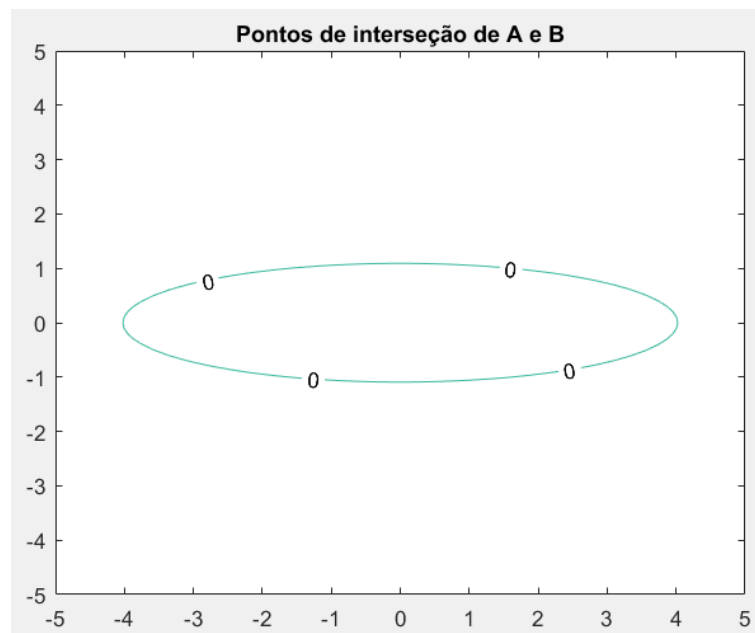


Fonte: Produção do próprio autor.

A interseção de duas superfícies quadráticas em um espaço de três dimensões pode produzir uma curva simples, uma curva assimétrica, duas curvas em planos diferentes ou apenas um ponto (TOUSSAINT, 1994, p. 35).

Encontrar os pontos onde C é igual a 0 significa encontrar os pontos de interseção das matrizes A e B . A curva produzida pela interseção de A e B é dada na Figura 10.

Figura 10 – Pontos de interseção de A e B



Fonte: Produção do próprio autor.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

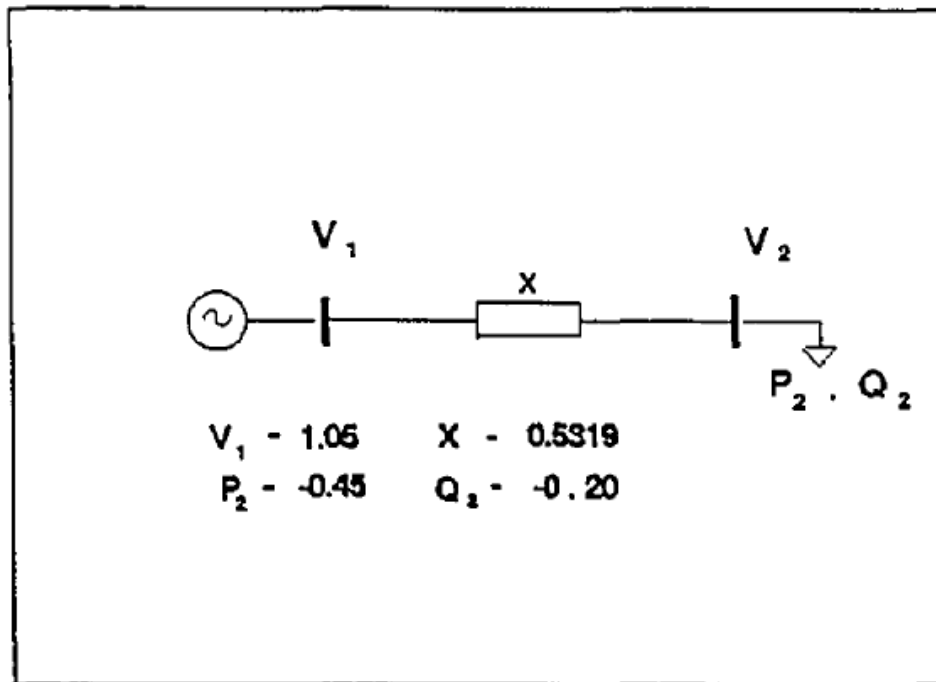
Para alcançar os objetivos estipulados, foi utilizado o *software* MATLAB. Na plataforma, foram desenvolvidas simulações para comprovar o estudo teórico.

As equações de fluxo de potência, vistas na equação (4.20), são da forma $z_i = x_r^T J_i x_r e$, portanto, são equações ditas quadráticas. A dimensão da matriz J_i é $2N \times 2N$, onde N é o número de barramentos do sistema, que pode ser representada por um gráfico de dimensões $(2N-1)$. O método trata-se de uma solução por interseções de superfícies descritas por $J_i e$, e, por isso, para uma visualização gráfica, um sistema de 2 barramentos é desejado.

5.1 Sistema de Dois Barramentos

O sistema de dois barramentos analisado foi o da Figura 11. Apesar de um sistema de dois barramentos não representar, de forma alguma, uma rede de distribuição real, ele permite a visualização dos conceitos do método.

Figura 11 – Sistema de dois barramentos



Fonte: Toussaint (1994).

Como dados do sistema:

- $V_1 = 1.05 pu$;
- $P_2 = -0.45 pu$;
- $Q_2 = -0.20 pu$;
- $X = 0.5319 pu$.

Calcula-se então a matriz admitância de barra Y , que fica como em (5.1).

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} -1.8801i & 1.8801i \\ +1.8801i & -1.8801i \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Com isso pode-se encontrar as matrizes J_{P2} e J_{Q2} , utilizando as equações (5.2) e (5.3).

$$J_{Pi} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha g^T + g \alpha^T & -\alpha b^T + b \alpha^T \\ \alpha b^T - b \alpha^T & \alpha g^T + g \alpha^T \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$J_{Qi} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha g^T + g \alpha^T & -\alpha b^T + b \alpha^T \\ \alpha b^T - b \alpha^T & \alpha g^T + g \alpha^T \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Onde α é uma matriz $2N \times 1$ de zeros, exceto na i -ésima posição que tem valor 1. As matrizes g e b são a i -ésima coluna de G e B , respectivamente, sendo que G é a parte real e B é a parte imaginária de Y_{bus} .

Aplicando os dados às equações (5.2) e (5.3), encontra-se as matrizes que descrevem o barramento 2 do sistema. Com as equações (4.35), (4.36), (4.45) e (4.46) é possível determinar os autovalores de J_{P2} e J_{Q2} e, com as equações (4.37), (4.38), (4.47) e (4.48), seus respectivos autovetores. Os resultados se encontram nos Quadros 2 e 3.

Quadro 2 – Matriz J_{P2} seus autovalores e autovetores

J_{P2}		λ		0	0.94	-0.94
0	0	0.94	\mathbf{v}	0	0.7071	0.7071
0	0	0		-1	0	0
0.94	0	0		0	0.7071	-0.7071

Fonte: Produção do próprio autor.

Quadro 3 – Matriz J_{Q_2} seus autovalores e autovetores

J_{Q_2}			λ	1.88	2.2693	-0.3894
0	-0.94	0	\mathbf{v}	0	-0.3827	-0.9239
-0.94	1.88	0		0	0.9239	-0.3827
0	0	1.88		1	0	0

Fonte: Produção do próprio autor.

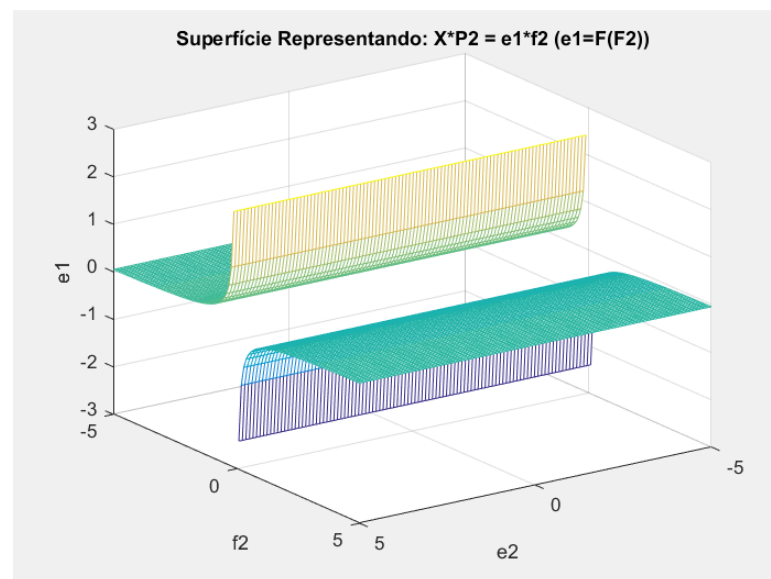
De posse dos valores descritos nos Quadros 2 e 3, é possível definir as equações que descrevem as matrizes J_i a partir da equação (4.20) e assim obtém-se as equações (5.4) e (5.5).

$$XP_2 = e_1 f_2 \quad (5.4)$$

$$XQ_2 = e_2^2 + f_2^2 - e_1 e_2 \quad (5.5)$$

Agora, pode-se representar graficamente as superfícies que descrevem P_2 e Q_2 . A superfície representando Q_2 é um hiperboloide de duas folhas e a representando P_2 é um cilindro hiperbólico. A superfície representando V_1^2 é um par de planos paralelos.

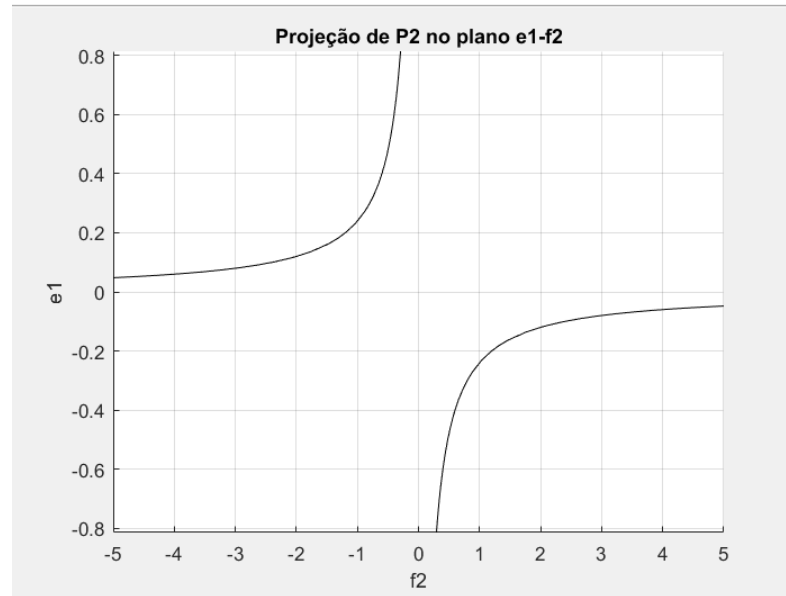
Para montar a superfície P_2 , primeiro escreve-se $e_1 = F(f_2) = \frac{XP_2}{f_2}$ e, assim, é possível plotar a superfície da Figura 10.

Figura 12 – Superfície que descreve XP_2 

Fonte: Produção do próprio autor.

A projeção de P_2 no plano $e_2 - f_2$ é visto na Figura 13.

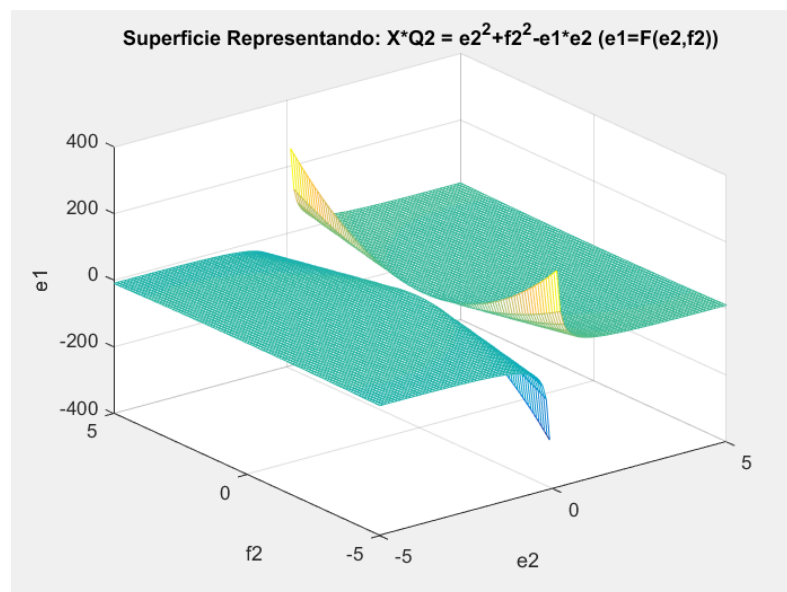
Figura 13 – Projeção de XP_2 no plano $e_2 - f_2$



Fonte: Produção do próprio autor.

Para representar Q_2 foram descritas duas equações. A primeira equação, é obtida ao isolar-se o termo e_1 e escrevendo-o como função de e_2 e f_2 , ou seja, $e_1 = F(e_2, f_2) = \frac{e_2^2 + f_2^2 - XQ_2}{e_2}$. Essa superfície é vista na Figura 14.

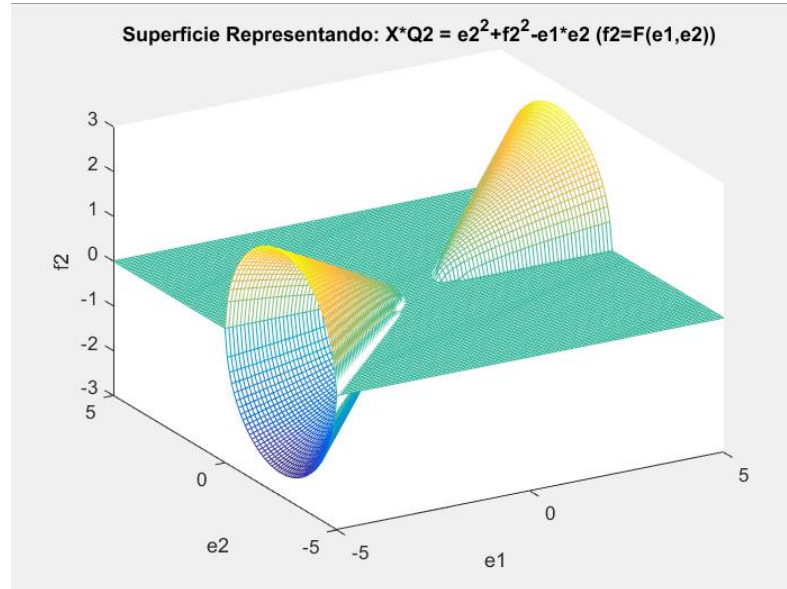
Figura 14 – Superfície que descreve XQ_2 : $e_1 = F(e_2, f_2)$



Fonte: Produção do próprio autor.

Para a segunda equação, isola-se o termo f_2 e o escreve como função de e_1 e e_2 , ou seja, $f_2 = F(e_1, e_2) = \sqrt{e_1 e_2 - e_2^2 + XQ_2}$. A Figura 15 representa essa superfície.

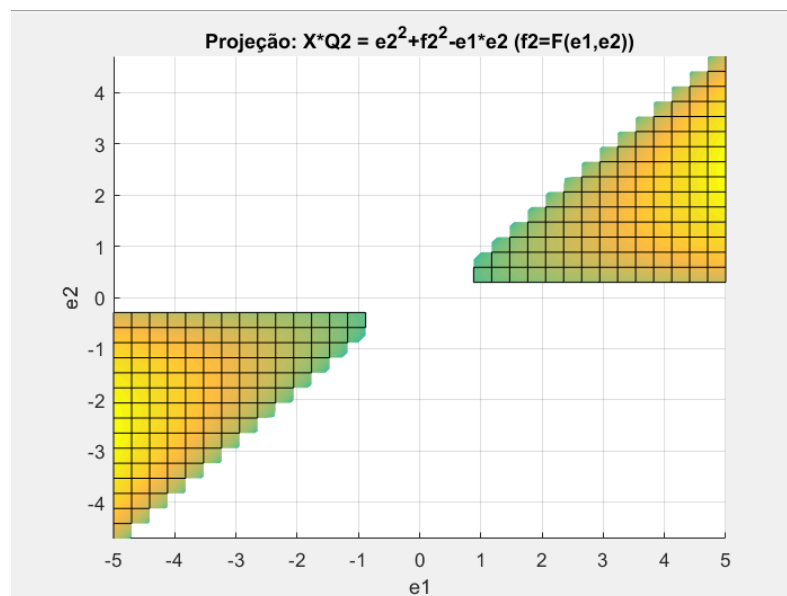
Figura 15 – Superfície que descreve XQ_2 : $f_2 = F(e_1, e_2)$



Fonte: Produção do próprio autor.

Para projetar Q_2 no plano $e_2 - f_2$, o plano $Q_2 = 0$ não foi plotado, para ser possível a visualização, representado na Figura 16.

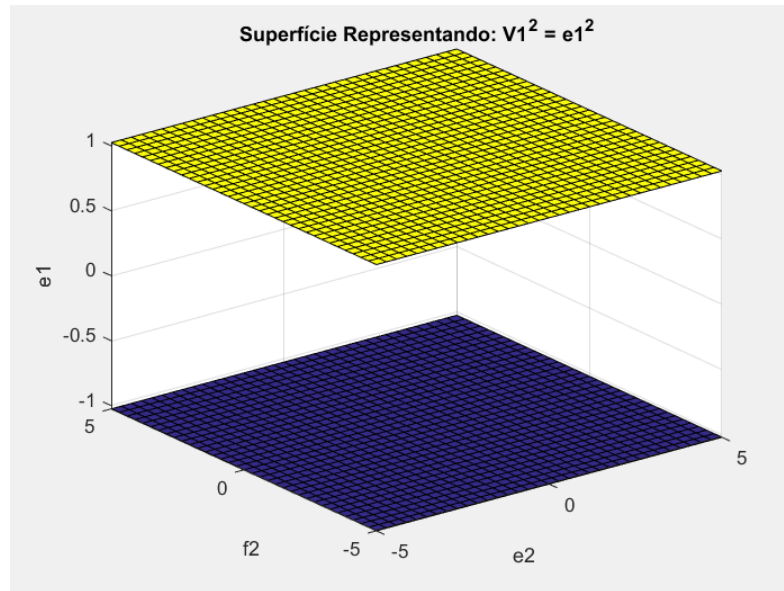
Figura 16 – Projeção da Figura 15 no plano $e_2 - f_2$



Fonte: Produção do próprio autor.

Por último, V_1^2 é descrito pela equação $V_1^2 = e_1^2$ e pode ser representado por dois planos nos eixos e_2, f_2 e e_1 , como na Figura 17.

Figura 17 – Planos que descrevem V_1^2



Fonte: Produção do próprio autor.

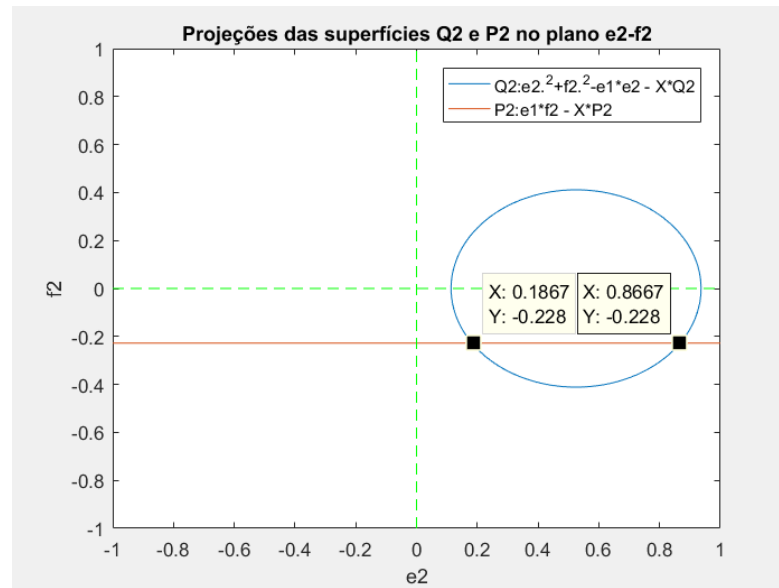
5.2 Soluções

Projetando as superfícies Q_2 e P_2 , a partir das equações que descrevem o sistema (5.4) e (5.5), obtém-se o gráfico da Figura 18. O círculo é a projeção do hiperboloide que descreve Q_2 , enquanto a linha é a projeção do cilindro hiperbólico que descreve P_2 . As soluções para esse sistema podem então ser encontradas pela interseção das superfícies de P_2 e Q_2 . Essa interseção se dá em dois pontos no plano $e_2 - f_2$, sendo o primeiro ponto em $(0.8764, -0.228)$ e o segundo em $(0.1825, -0.228)$. Os resultados podem ser vistos na Tabela 1.

Tabela 1 – Soluções

	Soluções		Soma e Diferença das Soluções	
	1	2	$(1+2)/2$	$(1-2)/2$
e_1	1.05	1.05	1.05	0
e_2	0.8764	0.1825	0.5249	0.3421
f_2	-0.228	-0.228	-0.228	0

Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 18 – Projeções de Q_2 e P_2 no plano $e_2 - p_2$ 

Fonte: Produção do próprio autor.

Para validar as soluções listadas na Tabela 1 foi utilizado o MATPOWER, uma ferramenta gratuita para simulações de sistemas de potência. A solução obtida encontra-se destacada pelo retângulo vermelho na Figura 19. Ressalta-se que o resultado $0.897 \angle -14.724^\circ$ encontrado pelo MATPOWER é descrito em coordenadas polares, e representa o valor $0.8765 - j0.228$ em coordenadas retangulares.

Figura 19 – Soluções encontradas com o MATPOWER

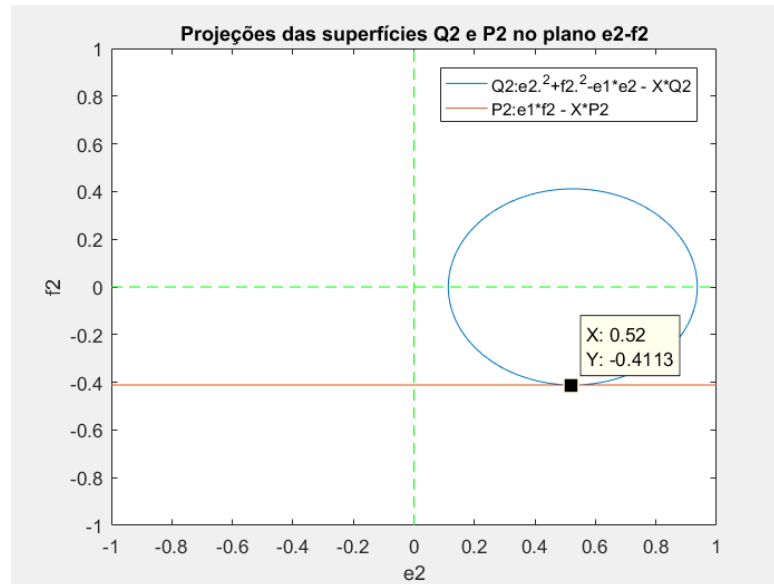
Bus Data						
Bus #	Voltage		Generation		Load	
	Mag (pu)	Ang (deg)	P (MW)	Q (MVar)	P (MW)	Q (MVar)
1	1.050	0.000*	0.45	0.36	-	-
2	0.897	-14.724	-	-	0.45	0.20
Total:			0.45	0.36	0.45	0.20

Fonte: Produção do próprio autor.

A Figura 20 ilustra como as soluções mudam quando se tem um aumento na demanda de potência ativa, considerando-se que a potência reativa e a tensão são mantidas constantes. O ponto onde as soluções coincidem representa a máxima potência ativa que pode ser fornecida para certo valor de potência reativa e tensão na barra de referência. Nesse ponto, $P_2 = -0.8130$.

Se a demanda de potência ativa continuar a ser incrementada ($P_2 < -0.813$), as soluções "desaparecem" e o fluxo de potência é dito inviável (TOUSSAINT, 1994, p. 41).

Figura 20 – Limite de potência ativa



Fonte: Produção do próprio autor.

6 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

6.1 Conclusão

A análise do fluxo de potência é muito importante para entender problemas de operação, controle e planejamento dos sistemas de potência. Por isso, a compreensão da teoria envolvida na análise das propriedades das equações do fluxo de potência tem grande valor para atender as mudanças que ocorrem nos sistemas de potência.

Neste trabalho foi desenvolvido um programa em MATLAB que foi capaz de auxiliar a análise do problema de fluxo de potência em um sistema de dois barramentos.

Um sistema de dois barramentos foi escolhido para trabalhar, pois um sistema com três barramentos ou mais gerariam superfícies com mais de três dimensões. Com dois barramentos foi possível visualizar as superfícies que descrevem a potência ativa, a potência reativa e a tensão.

Também foi possível encontrar as soluções do problema, $e_2 = 0.8764$ e $f_2 = -0.228$ e confrontar os resultados com a solução das equações não-lineares utilizando a função *fsolve()* do MATLAB. Para validar esses valores, se utilizou a ferramenta MATPOWER, e os mesmos resultados foram obtidos.

Por fim, encontrou-se o limite de potência ativa demandada que o sistema conseguiria fornecer, dado uma potência reativa e tensão na barra de referência constantes. Esse limite é $P_2 = -0.8130$

6.2 Trabalhos Futuros

A partir do trabalho desenvolvido, é possível listar algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Aplicar o estudo em um sistema de distribuição com dimensões mais próximas da realidade, por exemplo um sistema com dados conhecidos do *Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE)*.
- Comparar o esforço computacional que seria poupado, em comparação com outros métodos de solução.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA. **Geração Distribuída**. Brasília: ANEEL, 2018. Disponível em: <https://www.aneel.gov.br/geracaodistribuida>. Acesso em: 06 dez. 2019.
- ANTON, H.; HORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- BANSAL, H. **Handbook of Distributed Generation: Electric Power Technologies, Economics and Environmental Impacts**. Berlim: Springer, 2017.
- KOTHARI, D. P.; NAGRATH, I. J. **Modern Power System Analysis**. 3 ed. Deli: Tata McGraw-Hill, 2009.
- LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas aplicações**. 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- MENDES, M. A. **Análise dos Impactos da Alta Inserção de Geração Distribuída Fotovoltaica na Proteção de Sobrecorrente Temporizada**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Centro Tecnológico, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.
- TOUSSAINT, M. **An Analytical Study of the Load Flow Problem**. 1994. Thesis (Master in Engineering) – Faculty of Graduate Studies and Research, Department of Electrical Engineering, McGill University, Montreal, 1994.
- WANG, X. F. **Modern Power System Analysis**. Berlim: Springer, 2018.
- ZHAO, B.; WANG, C.; ZHANG, X. **Grid-Integrated and Standalone Photovoltaic Distributed Generation Systems: Analysis, Design, and Control**. Nova Jersey: Wiley, 2018.